

Apellidos: _____ Nombre: _____

IMPORTANTE

- ⌚ Duración del examen: **120 minutos**
- 📄 No olvide anotar el nombre y los apellidos en todas las hojas de examen, incluido el enunciado de examen
- 📄 No se permite ningún tipo de documentación
- 📄 Las respuestas se entregarán en hojas de examen
- 📄 Se entregarán las hojas de examen, incluido el enunciado de examen, dobladas por la mitad

1. (20 puntos) Sea el lugar geométrico de un sistema de control en tiempo discreto mostrado en la figura 1.

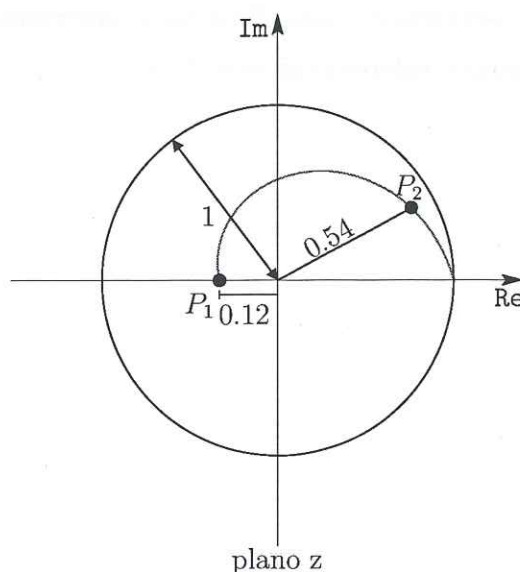


Figura 1: Lugar geométrico del sistema considerado.

Evalúe el período de muestreo que satisface las condiciones dinámicas del sistema discreto bajo estudio, presuponiéndose que la frecuencia natural no amortiguada en el punto de operación P_2 asciende a 550,71 rad/s.

2. (20 puntos) Considere un sistema de control, con realimentación unitaria, cuya función de transferencia en lazo cerrado obedece a

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10s}{s^2 + \pi^2}.$$

Determine el período de muestreo T al que ha de «discretizarse» la función de transferencia del sistema para que la dinámica del sistema opere en régimen inestable.

3. (40 puntos) Determine la solución, en forma cerrada, de la transformada z de las siguientes funciones $f(k)$.

(a) (20 puntos) $f(k) = \sum_{k=0}^n \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2}k\right) u(k)$.

(b) (20 puntos) $f(k) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)^k u(k-2)$.

4. (20 puntos) Sea un sistema de control digital, con realimentación unitaria, cuya función de transferencia en lazo abierto obedece a

$$G(z) = \frac{K - 1/2}{z(z + K + 1/2)}.$$

Determine, para un período de muestreo $T = 1.5$ s, el valor mínimo de K que convierte al sistema en inestable, sin recurrir para ello a las condiciones del módulo y del ángulo.

Nota: considere únicamente valores positivos de K .

$$\frac{W_d}{W_s} = 0.12 = 2\pi \frac{W_d}{W_s} \rightarrow \frac{W_d}{W_s} = \frac{1}{2}; \quad W_s = 2W_d$$

$$|Z| = e^{-\frac{2\pi\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \cdot \frac{W_d}{W_s}} = 0.12 \rightarrow \gamma =$$

$$= e^{-\frac{2\pi\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \cdot \frac{1}{2}} = e^{-\frac{\pi\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}}} = 0.12$$

$$\frac{-\pi\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \ln 0.12; \quad \pi^2\gamma^2 = \ln^2 0.12 (1-\gamma^2)$$

$$\pi^2\gamma^2 = \ln^2 0.12 - \ln^2 0.12 \cdot \gamma^2$$

$$(\pi^2 + \ln^2 0.12) \gamma^2 = \ln^2 0.12$$

$$\gamma^2 = \frac{\ln^2 0.12}{\pi^2 + \ln^2 0.12}$$

$\begin{array}{r} 0.5594 \\ \hline -0.5594 \end{array}$

$$|Z| = e^{-\frac{2\pi\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \cdot \frac{W_d}{W_s}} = 0.54$$

$$\frac{-2\pi\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \cdot \frac{W_d}{W_s} = \ln 0.54; \quad \frac{W_d}{W_s} = \frac{\ln 0.54 \cdot \sqrt{1-\gamma^2}}{-2\pi\gamma}$$

$$\frac{W_d}{W_s} = 2\pi \frac{W_d}{W_s} = 2\pi \cdot 0.1453 = 0.9130 (\sim 52.311^\circ) \Rightarrow$$

$$W_s = 2W_{d1} = 2W_{n1} \sqrt{1-\gamma^2} = 1.6578 W_{n1}$$

$$W_s = 6.8823 W_{d2} = 6.8823 W_{n2} \sqrt{1-\gamma^2} = 5.7046 W_{n2}$$

$$\frac{2\pi}{T} = 1.6578 W_{n1} = 5.7046 W_{n2}$$

$$T = \frac{2\pi}{5.7046 \cdot 550.71} = 0.002 = 2 \text{ ms}$$



Apellidos:		Pág.:
Nombre:	Fecha:	
Titulación:		
Asignatura:	Curso / grupo:	

$$\frac{10s}{s^2 + \pi^2} ; \quad s = \pm \pi j$$

$$z = e^{s \cdot T} = e^{0 \cdot T} \cdot e^{\pm \pi T j}$$

CON $T = 1$ s, LAS DOS RAÍCES SE SITUAN EN
 $z = -1$, CONVIRTIENDO AL SISTEMA EN INESTABLE



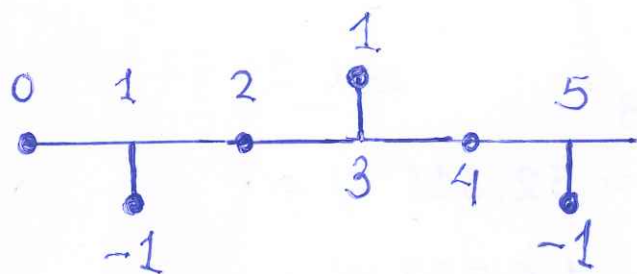
Apellidos:		Pág.:
Nombre:	Fecha:	
Titulación:		
Asignatura:	Curso / grupo:	

$$\begin{aligned}
 b) \quad a^k \cdot u(k-2) &= a^k \cdot a^{-2} \cdot a^2 \cdot u(k-2) \\
 &= a^2 \cdot \underbrace{a^{k-2} \cdot u(k-2)}_{z^{-2} \cdot z \{a^k\}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_n \left(\frac{1}{2} \right)^2 &= 2 \mathcal{L}_n \frac{1}{2} \\
 &= -2 \mathcal{L}_n 2
 \end{aligned}$$

$$(-2 \mathcal{L}_n 2) \cdot z^{-2} \cdot \frac{1}{1 + \mathcal{L}_n 2 z^{-1}} = \frac{(-2 \mathcal{L}_n 2) \cdot z^{-1}}{z + \mathcal{L}_n 2}$$

a)



$$\cos(k+1) \pi/2 = -\sin k \pi/2$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{\infty} x(k) &\rightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} \cdot X(z) = \frac{-1}{1-z^{-1}} \cdot \frac{z^{-1} \cdot \sin \pi/2}{1 - 2z^{-1} \cos \pi/2 + z^{-2}} \\
 &= \frac{-z^{-1}}{(1-z^{-1})(1+z^{-2})}
 \end{aligned}$$



Apellidos:		Pág.:
Nombre:	Fecha:	
Titulación:		
Asignatura:	Curso / grupo:	

$$\frac{C(z)}{D(z)} = \frac{\frac{K-1/2}{z(z+K+1/2)}}{1 + \frac{K-1/2}{z(z+K+1/2)}} = \frac{K-1/2}{z(z+K+1/2) + K-1/2}$$

$$P(z) = \underbrace{z^2}_{a_0} + \underbrace{(K+1/2)z}_{a_1} + \underbrace{(K-1/2)}_{a_2}$$

CONDICIONES DE ESTABILIDAD DE JURY

1. - $|a_2| < a_0 \rightarrow |K-1/2| < 1; -\frac{1}{2} < K < \frac{3}{2}$

2. - $P(1) > 0 \rightarrow 1+2K > 0; K > -\frac{1}{2}$

3. - $P(-1) > 0 \rightarrow$ NO INTERVIENE K
| grado par

RANGO DE ESTABILIDAD $-\frac{1}{2} < K < \frac{3}{2}$. PARA $K = \frac{3}{2}$

SISTEMA INESTABLE, PUES

$$P(z) = z^2 + 2z + 1 = 0 \rightarrow P(z) = (z+1)^2 = 0$$

POLO MÚLTIPLE SOBRE LA CIRCUNFERENCIA DE RADIO UNIDAD.